基于非局部理论的分数阶黏弹性场地地震放大效应分析

谢顺利[1,2],张春丽[1],周阿祥[3]

(1. 中原工学院建筑工程学院,450007 郑州;2. 郑州大学材料科学与工程学院,450001 郑州;
3. 河南省金凤牧业设备股份有限公司,463900 驻马店)

摘　要:基于非局部理论和分数阶导数理论,研究上覆黏弹性场地土的地震放大效应。利用 Eringen 非局部理论考虑土体颗粒尺度等非局部效应的影响,通过分数阶黏弹性本构模型刻画场地土的应力应变本构关系,建立基于非局部理论的分数阶黏弹性场地土的振动微分方程;考虑分数阶导数的性质和黏弹性场地土的边界条件,得到了简谐地震波作用下黏弹性场地土的位移和剪切应力的解析解,并在频率域内给出了位移放大系数和应力放大系数的表达式;最后通过数值算例分析了非局部效应、分数阶导数的阶数和土体黏性参数等对黏弹性场地地震放大效应的影响。数值分析结果表明,在低频时位移放大系数和应力放大系数随频率变化曲线存在波动,高频时逐渐趋于稳定;非局部效应对场地土位移放大系数的影响与频率有关,对应力放大系数的影响较大,在研究场地土振动效应时有必要考虑土体非局部效应的影响;分数阶导数的阶数越小,位移放大系数和应力放大系数随频率变化曲线波动越大;场地土的力学性质对场地土的振动效应的影响较大;上覆场地土的黏性对位移放大系数的影响与频率有关,高频时,土体黏性越大,位移放大系数越大;越接近基岩,土体的应力放大系数越大,且土体深度对应力放大系数的影响越大。

关键词:非局部理论;分数阶导数;黏弹性;竖向振动;放大效应

中图分类号:TU435　　　　文献标志码:A

Analysis of vertical dynamic amplification effect of fractional viscoelastic ground soil based on nonlocal theory

XIE Shunli[1,2],ZHANG Chunli[1],ZHOU axiang[3]

(1. Department of Civil Engineering,Zhongyuan University of Technology,450007 Zhengzhou,China;
2. School of Materials Science and Engineering,Zhengzhou University,450001 Zhengzhou,China;
3. Henan Jinfeng Poultry Equipment Company with Limited Liability,463900 Zhumadian,China)

Abstract:Based on nonlocal theory and fractional derivative theory,the seismic amplification effect of overlying viscoelastic soil is studied. The dynamic differential equations of fractional viscoelastic ground soil are established based on the nonlocal theory by considering the influence of nonlocal effects such as particle size,and the nonlocal effects is considered by using Eringen's nonlocal theory,and the stress-strain

收稿日期:2021-01-25　　　**修回日期**:2022-06-03
基金项目:国家留学基金资助项目(No. 201908410098);河南省高等学校重点科研资助项目(No. 21A560017)
通信作者:谢顺利,讲师。E-mail:53845664@qq.com
引用格式:谢顺利,张春丽,周阿祥. 基于非局部理论的分数阶黏弹性场地地震放大效应分析[J]. 应用力学学报,2022,39(4):726-731,741.
XIE Shunli,ZHANG Chunli,ZHOU Axiang. Analysis of vertical dynamic amplification effect of fractional viscoelastic ground soil based on nonlocal theory[J]. Chinese journal of applied mechanics,2022,39(4):726-731,741.

constitutive relation of ground soil is described by using the fractional derivative viscoelastic constitutive model. Considering the properties of fractional derivative and boundary conditions of viscoelastic ground soil, the analytical solutions of displacement and shear stress of viscoelastic ground soil under harmonic seismic wave are obtained, and the expressions of displacement amplification coefficient and stress amplification coefficient are given in frequency domain. The numerical results show that the displacement amplification coefficient and stress amplification coefficient fluctuate with frequency at low frequency, and tend to be stable at high frequency. The influence of nonlocal effect on the displacement amplification coefficient of ground soil is related to frequency, and the influence on the stress amplification coefficient is greater. It is necessary to consider the influence of nonlocal effect when studying the dynamic effect of ground soil. The smaller the order of fractional derivative, the more severe the fluctuation of curves of vertical displacement amplification coefficient and stress amplification coefficient varying with frequency. The mechanical properties of ground soil have a greater impact on the vertical dynamic effect of ground soil. The influence of the viscosity of the overlying soil on the displacement magnification coefficient is related to the frequency, When the high frequency and the larger the viscosity of the soil, the larger the displacement magnification coefficient. The closer to the bedrock, the greater the stress amplification coefficient of soil, and the larger the stress amplification coefficient changes with depth.

Key words: nonlocal theory; fractional derivative; viscoelasticity; vertical vibration; amplification effect

在地震波作用下,场地土对地震波有放大和滤波作用,场地条件和场地土的力学性质对场地土的地震放大效应的影响重大,研究不同场地条件和考虑场地土各部分区域对地震放大效应的影响对地下结构或建筑物的动力响应和稳定问题具有十分重要的工程应用价值,事关工程安全问题。Idriss 等[1]基于一维剪切梁模型研究了剪切模量为常数和沿深度按幂函数变化的场地土的水平振动特性和地震反应;Boer 等[2-3]利用多孔介质理论得到了不可压流体饱和半空间一维动力响应的解析解,并研究了平面波的传播和反射问题;Davis[4]借助等效剪切模量对剪切模量沿深度按幂函数变化的场地土的振动问题进行了研究;高玉峰等[5]在时间域内研究了成层地基一维土层地震反应问题,得到了问题的解析解。栾茂田等[6]研究了水平成层匀质场地自振特性,并给出了时域内地震动力响应的解析表达式。尚守平等[7]在一维波动模型的基础上,研究了竖直向上传播的稳态剪切地震波作用下剪切模量沿深度按指数规律变化的场地土的横向自由振动问题;杨骁等[8]在多孔介质理论的基础上,借助 Crump 数值反演研究了黏弹性饱和不可压多孔介质层的一维动力响应问题;李伟华等[9]基于非饱和多孔介质波动方程,研究了平面 P 波入射下场地土中的波场问题。为了更加合理准确地刻画场地土的黏弹性特性,刘林超等[10]借助分数阶黏弹性本构关系,在一维波动模型的基础上研究了竖直向上传播的剪切地震波作用下分数阶黏弹性场地土地震放大效应。段玮玮等[11]基于 Biot 动力固结方程,将土骨架视为黏弹性体,并采用分数阶导数本构关系来描述土骨架的应力应变本构关系,在频率域内研究了饱和分数阶黏弹性土层竖向振动放大效应。很明显,这些研究是将场地土视为各向均匀同性介质,对于场地土内任意点的应力没有考虑周围各点的影响,也没有考虑土体颗粒和孔隙尺度等非局部效应的影响[12-13]。Eringen 等[14-15]指出连续体内某一点的应力,不仅只与该点的应变有关,还与连续体内所有点的应变及变形历史有关,为了能够有效反映尺度因素的影响,Eringen 提出了非局部理论。当前非局部理论主要被广泛应用在纳米领域,而在岩土工程或其他领域的应用还未得到重视。Li 等[12]首次将非局部弹性理论和Biot 饱和土理论相结合,提出了一种非局部 Biot 饱和土理论,并研究了流体饱和多孔介质中波的传播特性。徐长节等[16]在非局部 Biot 理论的基础上研究了饱和土中深埋圆柱形衬砌对平面弹性波的散射问题。本研究考虑土体非局部效应的影响,基于非局部弹性理论和分数阶黏弹性本构理论,研究基于非局部理论的分数阶黏弹性场地土振动放大效应,分析非局部效应等对系统动力特性的影响。

1 基于非局部的分数阶黏弹性场地土振动控制方程

图 1 所示厚度为 h 的场地土层,场地土下面为无穷大的基岩,场地土受向上传播的剪切地震波的作用,地震波满足

$$v(t)=v_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1}$$

其中:v_0 为剪切波横向位移幅值;ω 为圆频率;i 为虚数单位。

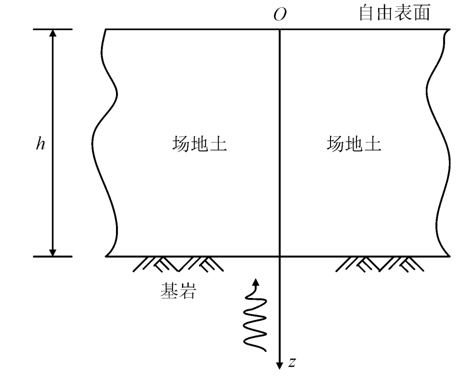


图 1 黏弹性场地土

Fig. 1 Viscoelastic field soil

为了考虑土体中任意点周围整个区域内其他点对该点处应力的影响,运用 Eringen 提出的非局部理论来描述土体的力学特性,假定场地土为均质线弹各向同性介质,在动力情况下,不计体力时的基本方程为[14]

$$\begin{cases}\sigma_{ij,j}=\rho\ddot{u}_i\\ \sigma_{ij,j}(r)=\int_V\chi(|r-r'|,e_0a)C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\mathrm{d}V(r')\\ \varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\end{cases} \tag{2}$$

其中:σ_{ij}为非局部应力;ε_{ij}和 ε_{kl}为应变张量;u_i 为位移张量;C_{ijkl} 为四阶弹性张量;积分 $\int_V\chi(|r-r'|,e_0a)$是非局部模量,e_0a 为表征非局部效应的非局部核函数,e_0和 a 分别为非局部材料常数和内特征长度,可根据原子晶格动态波的弥散曲线拟合等途径得到,$|r-r'|$为欧式距离。方程(2)第 2 式的微分形式为[14]

$$[1-(e_0a)^2\nabla^2]\sigma=\sigma^{\mathrm{L}} \tag{3}$$

其中:σ 为非局部应力张量;σ^{L} 为经典应力张量,对于场地土,主要指土体颗粒尺度等;∇^2为 Laplace 算子。

由于所研究的问题为一维问题,$\nabla^2=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}$,式(3)简化为

$$\left[1-(e_0a)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\right]\sigma_z=\sigma_z^{\mathrm{L}} \tag{4}$$

其中:σ_z 为场地土非局部剪切应力;σ_z^{L} 为场地土经典剪切应力。设场地土为黏弹性介质,且应力应变关系满足分数阶 Kelvin 本构关系[17],即

$$\sigma_z^{\mathrm{L}}=G_0[\gamma_z(t)+\eta^\alpha D^\alpha\gamma_z(t)] \tag{5}$$

其中:η 为场地土的黏弹比;G_0 为剪切弹性模量;$\gamma_z(t)$为切应变;D^α 为 $\alpha(0<\alpha<1)$阶 Riemann-Liouville 分数阶微分算子,其定义为[10]

$$D^\alpha[x(t)]=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$为伽玛函数。

场地土受竖直向上剪切地震波作用时只产生横向位移 $u(z,t)$,则式(2)的第 1 式为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_z(z,t)}{\mathrm{d}z}-\rho\frac{\mathrm{d}^2u(z,t)}{\mathrm{d}t^2}=0 \tag{7}$$

其中 ρ 为场地土密度。场地土的应变-位移为

$$\gamma_{yz}(t)=\frac{\mathrm{d}u(z,t)}{\mathrm{d}z} \tag{8}$$

对式(7)两端进行$\left[1-(e_0a)^2\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\right]$运算,并将式(5)和式(8)代入,则有

$$G_0\left[\frac{\mathrm{d}^2u(z,t)}{\mathrm{d}z^2}+\eta^\alpha D^\alpha\frac{\mathrm{d}^2u(z,t)}{\mathrm{d}z^2}\right]-\rho\left[1-(e_0a)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\right]\frac{\mathrm{d}^2u(z,t)}{\mathrm{d}t^2}=0 \tag{9}$$

当 $e_0=0,\alpha=1$ 时,式(9)退化为不考虑局部效应的经典黏弹性解,当 $e_0=0,\alpha=0$ 时,式(9)退化为不考虑局部效应的弹性解。

2 基于非局部理论的分数阶黏弹性场地土地震放大系数

由式(1)知,地震波为简谐地震波,则上覆场地土位移满足

$$u(z,t)=\tilde{u}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{10}$$

其中 $\tilde{u}(z)$为横向位移幅值。将式(10)代入式(9),并考虑分数导数性质,两端消去 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$,则有

$$G_0\left[\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}z}+\eta^\alpha(\mathrm{i}\omega)^\alpha\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}z}\right]+\rho\omega^2\left[\tilde{u}-(e_0a)^2\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}z}\right]=0 \tag{11}$$

令，$c_s=\sqrt{\dfrac{G_0}{\rho_0}}$，$\bar{\omega}=\dfrac{h\omega}{c_s}$，$\kappa=\dfrac{\eta c_s}{h}$，$\bar{u}=\tilde{u}/h$，$\bar{z}=z/h$，$\tau=\dfrac{e_0 a}{h}$，则式(11)无量纲运算为

$$\frac{\mathrm{d}^2u(\bar{z})}{\mathrm{d}\bar{z}^2}+\lambda^2u(\bar{z})=0 \tag{12}$$

其中 $\lambda^2=\dfrac{\bar{\omega}^2}{1+\mathrm{i}^\alpha\kappa^\alpha\omega^\alpha-\tau^2\bar{\omega}^2}$。求解方程式(12)可得

$$u(\bar{z})=A\cos\lambda\bar{z}+B\sin\lambda\bar{z} \tag{13}$$

其中，A、B 为待定系数，可由场地土上下边界条件确定。忽略高阶量的影响，由式(3)可得考虑非局部效应的应力为[16]

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{\mathrm{L}}+\tau^2\nabla^2\sigma_{ij}^{\mathrm{L}} \tag{14}$$

由此可得简谐竖向地震波作用下的剪切应力的表达式为

$$\bar{\sigma}_z(\bar{z})=\lambda(1+\mathrm{i}^\alpha\kappa^\alpha\bar{\omega}^\alpha)(-A\sin\lambda\bar{z}+B\cos\lambda\bar{z}) \tag{15}$$

其中，$\bar{\sigma}_z(\bar{z})=\tilde{\sigma}_z(z)/G_0$，$\tilde{\sigma}_z(z)$ 为非局部剪切应力幅值。

如图1所示的弹性场地顶面的位移和底面的剪应力分别为

$$\begin{cases}u(\bar{z})=\bar{v}_0 & \bar{z}=1\\ \sigma_z(\bar{z})=0 & \bar{z}=0\end{cases} \tag{16}$$

其中 $\bar{v}_0=\dfrac{v_0}{h}$。由式(13)、式(15)和式(16)可得

$$u(\bar{z})=\frac{\bar{v}_0\cos\lambda\bar{z}}{\cos\lambda} \tag{17}$$

$$\sigma_z(\bar{z})=-(\lambda-\tau^2\lambda^3)(1+\mathrm{i}^\alpha\kappa^\alpha\omega^\alpha)\frac{\bar{v}_0\sin\lambda\bar{z}}{\cos\lambda} \tag{18}$$

定义场地土任意深度处的位移幅值与基岩位移幅值的比值为位移放大系数，剪切应力幅值与基岩位移幅值的比值为应力放大系数，则有

$$\beta=\left|\frac{u(\bar{z})}{\bar{v}_0}\right|=\left|\frac{\cos\lambda\ \bar{z}}{\cos\lambda}\right| \tag{19}$$

$$\xi=\left|\frac{\bar{\sigma}_z(\bar{z})}{\bar{v}_0}\right|=\left|(\lambda-\tau^2\lambda^3)(1+\mathrm{i}^\alpha\kappa^\alpha\omega^\alpha)\frac{\sin\lambda\ \bar{z}}{\cos\lambda}\right| \tag{20}$$

当 $\tau=0$ 时，问题的解退化为不考虑局部效应的分数导数黏弹性解的情况，当 $e_0=0$，$\alpha=1$ 时则退化为不考虑局部效应的经典黏弹性解的情况，当 $e_0=0$，$\alpha=0$ 时则退化为不考虑局部效应的弹性解的情况。

3 数值算例分析

为了研究场地土非局部效应和本构模型参数等对场地土地震放大效应的影响，这里以数值算例的形式对位移放大系数 β 和 $z/h=0.5$ 处应力放大系数进行分析讨论。未作说明时，参数的取值分别为：$\alpha=0.5$，$\kappa=0.8$，$\tau=0.05$。图2给出了文献[10]和本研究($\tau=0$)位移放大系数的对比，当不考虑非局部效应时，本研究的解与文献[10]得到的解非常接近，可见本研究方法的正确性。图3～图8为位移放大系数 β 和 $z/h=0.5$ 处应力放大系数 ξ 随无量纲频率 $h\omega/c_s$ 的变化曲线，可以看出，在低频时，位移放大系数和应力放大系数随频率变化曲线存在波动。图3和图4为非局部效应对位移放大系数 β 和 $z/h=0.5$ 处应力放大系数 ξ 的影响，当 $\tau=0$ 时为不考虑土体非局部效应的情况，很明显非局部效应的情况可以退化到不考虑非局部效应的情况。在低频时非局部效应系数 τ 对位移放大系数几乎没有影响，而在高频时，τ 越大，位移放大系数越小；而非局部效应系数对应力放大系数 ξ 的影响较大，在低频时应力放大系数 ξ 随频率变化曲线波动较大，随着频率的增大逐渐趋于稳定，且 τ 越大，应力放大系数越小。

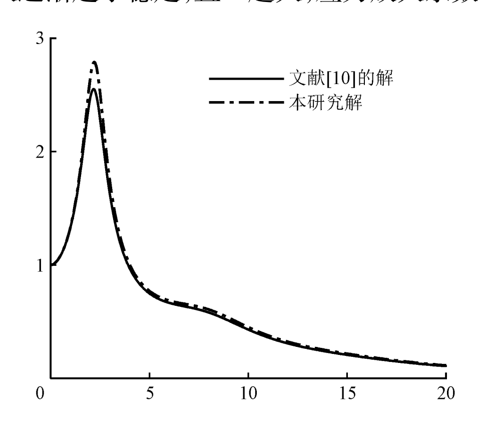


图2 文献[10]和本研究位移放大系数对比

Fig. 2 Comparison of displacement amplification coefficient between Ref. [10] and this paper

分数导数的阶数对位移放大系数 β 和应力放大系数 ξ 的影响较大(图5和图6)，且分数阶黏弹性模型的解可以退化到经典黏弹性模型的情况。分数阶黏弹性场地土位移放大系数 β 随频率变化曲线较经典黏弹性模型波动要大，且随着分数导数阶数的减小波动越大，位移放大系数 β 越大；随着分数导数阶数的减小应力放大系数 ξ 波动更厉害。分数导数的阶数是由场地土的力学性质决定的，可见，场地土的力学性质对场地土的地震效应的影响较大，且分数阶黏弹性模型可以通过数据拟合土体蠕变曲线来刻画不同性质的场地土，应用范围更广。

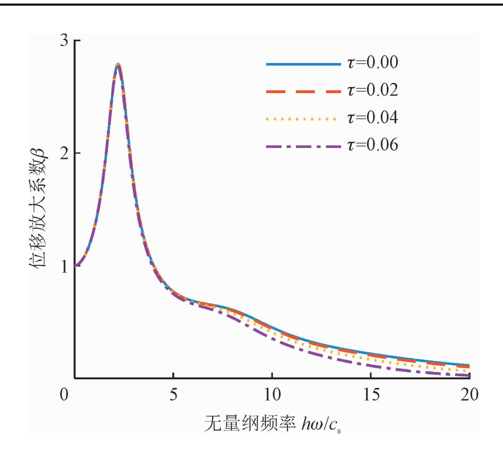


图 3　非局部效应对位移放大系数的影响

Fig. 3　Influence of non local effect on the displacement amplification factor

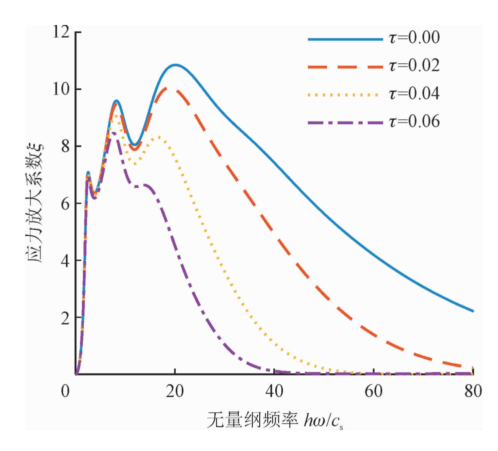


图 4　非局部效应对应力放大系数的影响

Fig. 4　Influence of non local effect on the stress amplification factor

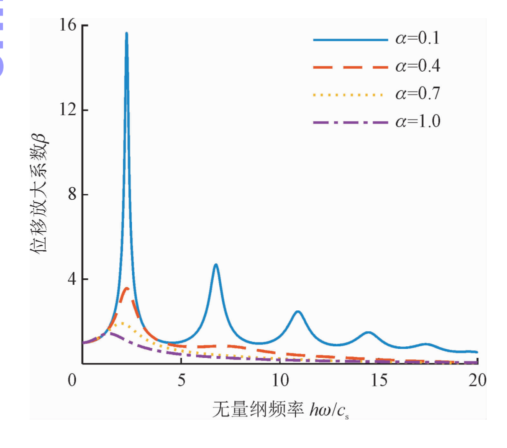


图 5　分数导数的阶数对位移放大系数的影响

Fig. 5　Influence of the order of the fractional derivative on the displacement amplification factor

土体黏性 κ 的影响见图 7、图 8，对于场地土下为基岩的情况，上覆场地土的黏性对位移放大系数的影响与频率有关，频率较小时，土体黏性 κ 越大，位移放大系数越小，而在高频时则相反，土体黏性 κ 越大，位移放大系数越大（图 7）；土体黏性 κ 越大，应力放大系数越大（图 8）。土体深度 z/h 对应力放大系数的影响见图 9，由于土体深度 z/h 越深，越接近基岩，所以土体深度 z/h 越深处的应力放大系数越大，且深度 z/h 对应力放大系数的影响越大。

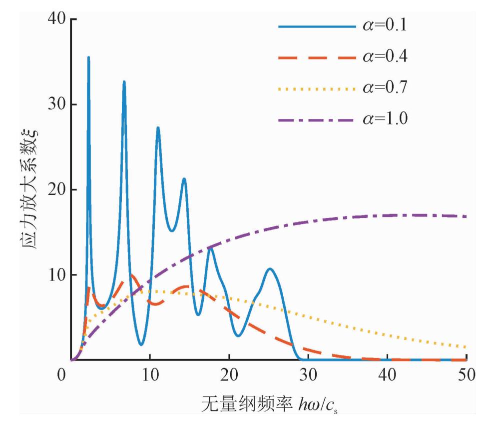


图 6　分数导数的阶数对应力放大系数的影响

Fig. 6　Influence of the order of the fractional derivative on the stress amplification factor

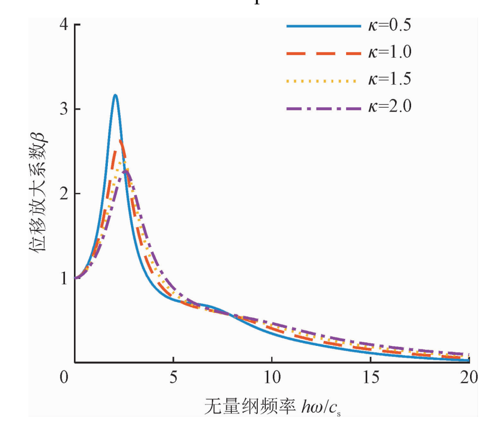


图 7　土体黏性对位移放大系数的影响

Fig. 7　Influence of soil viscosity on the displacement amplification factor

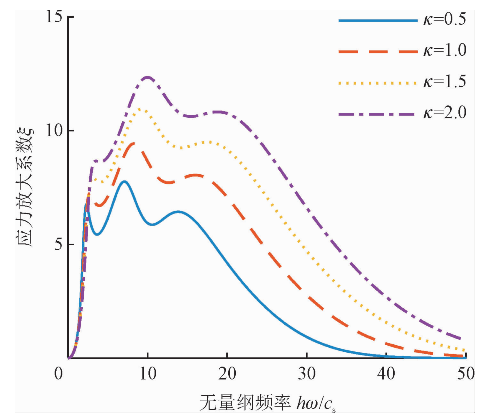


图 8　土体黏性对应力放大系数的影响

Fig. 8　Influence of soil viscosity on the stress amplification factor

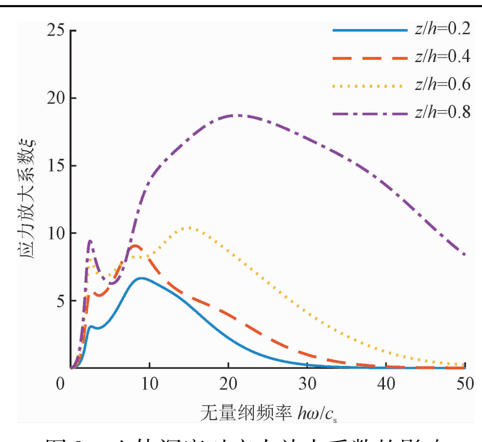


图 9 土体深度对应力放大系数的影响

Fig. 9 Influence of soil depth on the stress amplification factor

4 结 论

本研究在非局部理论、黏弹性理论和分数导数理论的基础上对黏弹性场地土的竖向振动放大效应进行了分析,并分析了土体非局部效应、力学性质等对地震放大系数的影响。主要结论如下。

1) 低频时,位移放大系数和应力放大系数随频率变化发生波动,高频时逐渐趋于稳定。

2) 非局部效应的情况可以退化到不考虑非局部效应的情况,分数阶黏弹性解可以退化到经典黏弹性解。

3) 土体孔隙尺度等非局部效应对场地土地震效应的影响不应被忽略。

4)场地土的力学性质对场地土的地震效应的影响较大。

5)非局部参数和上覆场地土的黏性对位移放大系数的影响与频率有关。

可见,对于场地土地震放大效应的研究,需要综合考虑土体非局部效应、力学性质、黏性等的影响,以便更加准确地为抗震设计提供依据。

参考文献:

[1] IDRISS I M, SEED H B. Seismic response of horizontal soil layers [J]. Journal of the soil mechanics and foundations division, 1968, 94(4): 1003-1031.

[2] BOER R, EHLERS W, LIU Z. One-dimensional transient wave propagation in fluid-saturated incompressible porous media[J]. Archive of applied mechanics, 1993, 63(1): 59-72.

[3] BOER R D, LIU Z. Plane waves in a semi-infinite fluid saturated porous medium [J]. Transport in porous media, 1994, 16(2): 147-173.

[4] DAVIS R. Effects of weathering on site response[J]. Earthquake engineering and structure dynamics, 2010, 24(2): 301-309.

[5] 高玉峰,金建新,谢康和,等. 成层地基一维土层地震反应解析解[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(4): 498-500.
GAO Yufeng, JIN Jianxin, XIE Kanghe, et al. General solution to the soil seismic response on stratified foundations[J]. Chinese journal of geotechnical engineering, 1999, 21(4): 498-500 (in Chinese).

[6] 栾茂田,刘占阁. 成层场地振动特性及地震反应简化解析解的完整形式[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(6): 747-749.
LUAN Maotian, LIU Zhange. A complete form of simplified analytical solution of natural vibration characteristics and seismic response of horizontally-layered soil sites[J]. Chinese journal of geotechnical engineering, 2003, 25(6): 747-749 (in Chinese).

[7] 尚守平,李刚,任慧. 剪切模量沿深度按指数规律增大的场地土的地震放大效应[J]. 工程力学, 2005, 22(5): 153-157.
SHANG Shouping, LI Gang, REN Hui. Seismic amplification of sites with exponentially increasing shear modulus with depth[J]. Engineering mechanics, 2005, 22(5): 153-157 (in Chinese).

[8] 杨骁,张燕. 一维流体饱和黏弹性多孔介质层的动力响应[J]. 力学季刊, 2005, 26(1): 44-52.
YANG Xiao, ZHANG Yan. Dynamical response of one dimension liquid saturated viscoelastic porous medium layer[J]. Chinese quarterly of mechanics, 2005, 26(1): 44-52 (in Chinese).

[9] 李伟华,郑洁. 饱和度对平面 P 波入射下自由场地地震反应的影响分析[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(3): 427-435.
LI Weihua, ZHENG Jie. Effects of saturation on free-field responses of site due to plane P-wave incidence[J]. Chinese journal of geotechnical engineering, 2017, 39(3): 427-435 (in Chinese).

[10] 刘林超,高洪波,闫启方. 上覆分数导数黏弹性场地土地震放大效应[J]. 应用力学学报, 2010, 27(4): 646-649.
LIU Linchao, GAO Hongbo, YAN Qifang. Seismic response analysis of amplification of ground soil by fractional derivative viscoelastic model[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2010, 27(4): 646-649 (in Chinese).

[11] 段玮玮,闻敏杰,李强. 饱和分数导数型黏弹性土层竖向振动放大效应[J]. 工程力学, 2013, 30(4): 235-240.
DUAN Weiwei, WEN Minjie, LI Qiang. Vertical vibration amplification of a saturated fractional derivative type viscoelastic soil layer [J]. Engineering mechanics, 2013, 30(4): 235-240 (in Chinese).

[12] LI H T, YANG Y, WEN T H, et al. On wave propagation characteristics in fluid saturated porous materials by a nonlocal Biot theory [J]. Journal of sound and vibration, 2016, 379: 106-118.

[13] TONG L H, DING H B, YAN J W, et al. Strain gradient nonlocal Biot poromechanics[J]. International journal of engineering science, 2020, 156: 103372.

[14] ERINGEN A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves[J]. Journal of applied physics, 1983, 54(9): 4703-4710.

(下转第 741 页)